

ოლიმპიადა ინფორმატიკაში „ალგორითმი 2025“

ევროპის უნივერსიტეტი

ევროპის ცენტრალური უნივერსიტეტი

ქვემოთ მოცემულია ოლიმპიადაზე წარმოდგენილი ამოცანები შესაბამისი ამოხსნებით.

1. გაქვთ 12 ცალი ერთიანი და 13 ცალი ნულიანი. შესაძლებელია თუ არა ამ 25 ციფრისგან შევადგინოთ ნატურალური რიცხვი რომელიც იქნება რომელიმე ნატურალური რიცხვის სრული კვადრატი? თუ შესაძლებელია მაშინ იპოვეთ ეს ნატურალური რიცხვი (პასუხი დაასაბუთეთ).

ამოხსნა

რიცხვის, რომელიც აგებულია მხოლოდ 12 ერთიანისგან, ციფრთა ჯამი 12-ის ტოლია. ეს იმას ნიშნავს, რომ იგი იყოფა 3-ზე. თუმცა, რომ იყოს რომელიმე ნატურალური რიცხვის სრული კვადრატი, ის უნდა იყოფოდეს $3^2 = 9$ -ზეც, რაც მოცემულ შემთხვევაში არ ხდება, რადგან ციფრთა ჯამი 12 არ იყოფა 9-ზე.

ამიტომ, მხოლოდ 12 ერთიანისგან მიღებული რიცხვი ვერ იქნება სრული კვადრატი.

ასევე, ამოცანა ითხოვს ყველა 25 ციფრის გამოყენებას — 12 ერთიანი და 13 ნულიანი.

მნიშვნელოვანია აღვნიშნოთ, რომ ნულებით დასრულებული სრული კვადრატები უნდა მთავრდებოდეს ლუწი რაოდენობის ნულით. მოცემული გვაქვს 13 ნული, რაც კენტია. მაშასადამე, მიღებული რიცხვი კენტი რაოდენობის ნულით ვერ იქნება სრულ კვადრატზე დამთავრებული.

დასკვნა:

25 მოცემული ციფრისგან შეუძლებელია ისეთი ნატურალური რიცხვის შედგენა, რომელიც იქნება რომელიმე ნატურალური რიცხვის სრული კვადრატი.

2. გვაქვს 10 ტომარა. 9 ტომარაში არის მხოლოდ ნამდვილი მონეტები, ერთ ტომარაში არის მხოლოდ ყალბი მონეტები. ნამდვილი მონეტა იწონის 10 გრამს, ხოლო ყალბი მონეტა იწონის 11 გრამს. ვიზუალურად მონეტები ერთნაირია (შეხედვით შეუძლებელია გარკვევა რომელია ნამდვილი და რომელი ყალბი მონეტა გვაქვს). გაქვთ სასწორი რომელიც აჩვენებს ზუსტ წონას გრამებში. ერთი აწონვით გაარკვეთ რომელ ტომარაში არის ყალბი მონეტები. (პასუხი დაასაბუთეთ).

ამოხსნა

ტომრებს მივანიჭოთ ნომრები 1-დან 10-ის ჩათვლით. შემდეგ მივმართოთ შემდეგი სტრატეგია:

- 1-ლი ტომარიდან ამოვიღოთ 1 მონეტა,
- მე-2 ტომარიდან — 2 მონეტა,
- მე-3-დან — 3 მონეტა,

- ...

- მე-10 ტომარიდან — 10 მონეტა.

საერთო ჯამში ამოვიღებთ:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 10 = (10 * 11) / 2 = 55 \text{ მონეტას.}$$

თუ ყველა მონეტა ნამდვილია (ანუ თითოეული იწონის 10 გრამს), მათი საერთო წონა იქნება:

$$55 * 10 = 550 \text{ გრამი.}$$

თუმცა, თუ რომელიმე ტომარაში ყალბი მონეტებია, მაშინ თითო ყალბი მონეტა 1 გრამით მეტს იწონის, შესაბამისად, საერთო წონა 550 გრამზე მეტი იქნება იმდენი გრამით, რამდენი მონეტაც ამოღებულია კონკრეტული ტომარიდან.

მაგალითად:

- თუ ყალბი მონეტები პირველ ტომარაშია (რომლიდანაც ამოღებულია 1 მონეტა), საერთო წონა იქნება 551 გრამი,

- თუ მეორეში — 552 გრამი,

- ...

- თუ მე-10-ში — 560 გრამი.

დასკვნა:

სასწორზე გაზომილი წონიდან გამოაკელით 550. მიღებული რიცხვი მიგანიშნებთ იმ ტომარის ნომერზე, სადაც მოთავსებულია ყალბი მონეტები.

3. მოცემული გაქვთ ჭადრაკის დაფა 8x8 და დომინოს კენჭები რომელიც სრულად ფარავს ჭადრაკის 2 უჯრას. ჭადრაკის დიაგონალის ბოლოში მოჭრეს ორი უჯრა (დიაგონალს მნიშვნელობა არ აქვს). შესაძლებელია თუ არა დომინოს კენჭებით დაფაროთ ჭადრაკის დაფა ისე რომ დომინოს კენჭები ერთმანეთს არ ფარავდეს და დომინოს კენჭები ფარავდეს ჭადრაკის ზუსტად 2 უჯრას. (პასუხი დაასაბუთეთ).

ამოხსნა

ჭადრაკის დაფაზე რიგდება მონაცვლეობით შავი და თეთრი უჯრები, შესაბამისად სულ გვაქვს 32 თეთრი და 32 შავი უჯრა.

დიაგონალზე მდებარე ყველა უჯრა ერთიდაიგივე ფერისაა (ან თეთრი, ან შავი). როცა დიაგონალის ბოლოებიდან ამოჭრიან ორ უჯრას, ისინი ერთნაირი ფერის იქნებიან.

შესაბამისად, დარჩება 32 ერთგვარ ფრად და 30 მეორეგვარ ფრად შეღებილი უჯრა.

თუმცა, დომინოს თითო კენჭი ფარავს ზუსტად ორ მონაცვლე ფერის უჯრას — ერთ თეთრს და ერთ შავს.

ამგვარად, 31 დომინოს კენჭით დაფარავ 62 უჯრას, მაგრამ საჭიროა ფერების რაოდენობა იყოს თანაბარი.

იმის გამო, რომ ფერების რაოდენობა განსხვავებულია (32 ერთგვარ ფერად, 30 მეორეგვარად), შეუძლებელია დაფის სრულად დაფარვა დომინოს კენჭებით ისე, რომ წესები არ დაირღვეს.

დასკვნა:

დაფის დაფარვა დომინოს კენჭებით მოცემულ პირობებში შეუძლებელია.

4. გაქვთ მრგვალი მაგიდა და ერთნაირი ზომის მრგვალი მონეტები. 2 მოთამაშე თამაშობს შემდეგ თამაშს - მორიგეობით უნდა დადონ მაგიდაზე მონეტები. მონეტა მთლიანად უნდა იდოს მაგიდაზე ისე, რომ სხვა მონეტას შესაძლებელია ეხებოდეს (არ ფარავდეს). სწორი სტრატეგიის შემთხვევაში რომელი მოთამაშე მოიგებს თამაშს (პირველი თუ მეორე მოთამაშე)? რატომ? (პასუხი დაასაბუთეთ).

ამოხსნა

თამაშის წარმატებული სტრატეგია დამოკიდებულია სიმეტრიის პრინციპზე. თუ პირველი მოთამაშე თავის მონეტას დადებს მაგიდის ზუსტად ცენტრში, მაშინ მას აქვს შესაძლებლობა, ყოველი მომდევნო სვლაზე განახორციელოს სარკისებური სიმეტრიული მოძრაობა მეორე მოთამაშის მიმართ.

მეორე მოთამაშე სადაც არ უნდა დადოს თავისი მონეტა, პირველი მოთამაშე დაადებს თავის მონეტას ზუსტად მის სარკისებურ ადგილას მაგიდის ცენტრის მიმართ.

ამით იგი უზრუნველყოფს, რომ ყოველთვის მოახერხებს მონეტის მოთავსებას იმ შემთხვევაში, თუ მეორე მოთამაშესაც ეს შესაძლებელია.

როდესაც მაგიდა აივსება და უკვე აღარ დარჩება ადგილი ახალი მონეტის დასადებად, ეს მაშინ მოხდება, როცა მეორე მოთამაშემ ბოლოს დადო მონეტა, ხოლო პირველსაც კვლავ ექნება სივრცე მის სიმეტრიულად დასადებად.

დასკვნა:

სწორი სტრატეგიის შემთხვევაში ყოველთვის იგებს პირველი მოთამაშე.

5. არსებობს თუ არა n მომდევნო ნატურალური რიცხვი რომელიც არის შედგენილი?

ამოხსნა

ავიღოთ რიცხვი $N = (n + 1)!$. ეს რიცხვი იყოფა ყველა რიცხვზე 2-დან $(n+1)$ -მდე, რადგან განაყოფი ჩართულია ფაქტორიალში.

განვიხილოთ შემდეგი n რიცხვი:

$N + 2$ – იყოფა 2-ზე

$N + 3$ – იყოფა 3-ზე

$N + 4$ – იყოფა 4-ზე

...

$N + (n + 1)$ – იყოფა $(n + 1)$ -ზე

ამრიგად, ყოველი ამ რიცხვთაგანი ერთზე მეტ გამყოფს ფლობს (თავად და ზემოთ ჩამოთვლილ შესაბამის რიცხვს), ანუ ეს რიცხვები შედგენილი რიცხვებია, სულ კი გვაქვს n რიცხვი.

დასკვნა:

ისეთი n რაოდენობის მომდევნო შედგენილი რიცხვი ნამდვილად არსებობს. ანუ პასუხია დიახ, n მომდევნო ნატურალური რიცხვი, რომელიც ყველა არის შედგენილი, არსებობს.

6. მაგიდაზე დევს 50 ვაშლი. მარი და გიორგი თამაშობენ შემდეგ თამაშს - ერთ ალეზაზე მოთამაშეს შეუძლია აიღოს 1, 2, 3, 4, 5 ან 6 ვაშლი. მარი და გიორგი მორიგეობით იღებენ მაგიდიდან ვაშლებს. წაგებულია ის მოთამაშე რომელიც ბოლოს აიღებს მაგიდიდან ვაშლს. გიორგიმ გამოიჩინა ჯენტლმენობა და მარის მისცა უფლება რომ თამაში დაიწყოს. არის თუ

არა გიორგი ჯენტლმენი (სწორი სტრატეგიის შემთხვევაში ვინ მოიგებს)? (პასუხი დაასაბუთეთ).

ამოხსნა

თამაშის გასაღები იმაში მდგომარეობს, რომ ყოველი ორი სვლის შემდეგ მაგიდაზე დარჩეს 7-ით ნაკლები ვაშლი. ანუ გიორგი შეეცდება, რომ თავისი ყოველი სვლის შემდეგ საერთო რაოდენობა 7-ით შემცირდეს.

მაგალითად:

- მარი აიღებს x ვაშლს (სადაც $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)

- გიორგი აიღებს $7 - x$ ვაშლს, რომ ჯამში ორივემ აიღოს 7

ამ სტრატეგიის დაცვით თამაშის მიმდინარეობა იქნება შემდეგი:

- $50 - 7 = 43$ ვაშლი

- $43 - 7 = 36$ ვაშლი

- $36 - 7 = 29$ ვაშლი

- $29 - 7 = 22$ ვაშლი

- $22 - 7 = 15$ ვაშლი

- $15 - 7 = 8$ ვაშლი

- $8 - 7 = 1$ ვაშლი

ბოლოს მაგიდაზე დარჩება 1 ვაშლი, რომლის აღებაც მოუწევს მარის, და ის წააგებს თამაშს.

დასკვნა:

სწორი სტრატეგიის გამოყენებით გიორგი ყოველთვის მოიგებს ამ თამაშს, ამიტომ ის რეალურად არ არის ჯენტლმენი, მან თამაშის დაწყების მოტივაციით მარის წაგება უზრუნველყო.

7. მოცემული გაქვთ სამი ასო C, E და U. ამ ასოების გამოყენებით უნდა შეადგინოთ ყველა 10 სიმბოლიანი სიტყვა (მაგ: ერთ ერთი სიტყვა შეიძლება იყოს CUECUECUEC). ეს სიტყვები დაალაგეთ ზრდადობით.

1. იპოვეთ ამ რიგში 2025 ადგილას მდგომი სიტყვა;

2. ბოლოდან 2025 ადგილას მდგომი სიტყვა. (პასუხი დაასაბუთეთ).

ამოხსნა

რადგან გვაქვს მხოლოდ 3 განსხვავებული სიმბოლო (C, E, U), სულ შესაძლებელია ამოცანის ამოსახნელად გამოვიყენოთ სამობითი თვლის სისტემა:

მივანიჭოთ სიმბოლოებს მნიშვნელობები:

$C = 0, E = 1, U = 2$

გადანომრვას თუ დავიწყებ 0-ით 2025-ე ადგილას მდგომი სიტყვა, იქნება ნომრით 2024:

$2024_{10} = 0002202222_3$ (წინ ნულებია დამატებული რომ იყოს ზუსტად 10 სიმბოლო)

შემდეგ თითოეული ციფრი ვაბრუნოთ შესაბამის სიმბოლოდ:

$0 \rightarrow C, 2 \rightarrow U, 1 \rightarrow E$

შედეგად მივიღებთ სიტყვას: CCCUUCUUUU

ბოლოდან 2025-ე ადგილას მდგომი სიტყვა, გადანომრვა მოვახდინოთ ახალი წესით (უკუღმა თანმიმდევრობით):

მივანიჭოთ: $C = 2, E = 1, U = 0$

შესაბამისად ანალოგიური მსჯელობით ვიღებთ: $UUUCCUCCCC$

დასკვნა:

- 2025-ე სიტყვა ლექსიკოგრაფიულად ზრდადობით დალაგებულ სიაშია $CCCUUCUUUU$

- ბოლოდან 2025-ე სიტყვაა $UUUCCUCCCC$.

8. წრეწირზე განლაგებულია ოთახები. ყველა ოთახს აქვს მხოლოდ ორი კარი, ოთახში არის მხოლოდ ერთი ნათურა და ნათურის ჩამრთველი/გამომრთველი (ყველა ოთახი ვიზუალურად ერთნაირია). ოთახში შესვლისას შეგიძლიათ ჩართოთ ან გამორთოთ ნათურა. როგორ უნდა დავთვალოთ თუ რამდენი ოთახია განლაგებული წრეწირზე. (პასუხი ახსენით).

ამოხსნა

დავიწყოთ რომელიმე ოთახიდან. შევიდეთ და თუ შუქი ჩამქრალია, ჩავრთოთ. თუ ანთებულია არაფერს ვაკეთებთ.

შემდეგ დავიწყოთ მოძრაობა საათის ისრის მიმართულებით და შევდივართ ოთახებში მორიგეობით, თან ვითვლით, მერამდენე ოთახში შევდივართ. დავიმახსოვროთ ეს რიცხვი, ვთქვათ n . მე- n ოთახში შუქი დაგვხვდა ანთებული გამოვრთოთ იგი. ახლა დავიწყოთ მოძრაობა საპირისპირო მიმართულებით და კვლავ დავთვალოთ n ოთახი საწყისი ოთახიდან. თუ ამ უკანასკნელ ოთახში შუქი ჩამქრალია, გამოდის, რომ წრეზე სულ $n-1$ ოთახია. თუ შუქი ანთებულია, იგივე პროცესი გავიმეოროთ მანამ, სანამ უკანასკნელ ოთახში შუქი ჩამქრალი არ დაგვხვდება. ამ მეთოდით საბოლოოდ მივიღებთ ზუსტ რაოდენობას, რამდენი ოთახია წრეწირზე.

დასკვნა:

ოთახების რაოდენობა შეიძლება დადგინდეს სინათლის ჩართვა-გამორთვით და სიმეტრიული მოძრაობით წრეზე. პროცესი დასრულდება მაშინ, როდესაც საპირისპირო მიმართულებით გადაადგილებისას ოთახში დაგვხვდება ჩამქრალი შუქი.

9. ცნობილია, რომ ერთ კუნძულზე ცხოვრობს ადამიანები, რომელთაც უყვართ თმების შეღებვა, თანაც თითოეულ მათგანს არჩეული აქვს ერთი ფერი და თმებს ყოველთვის ამ ფერით იღებავს. კუნძულზე პირველად მოხვედრილმა კორესპონდენტმა რამდენიმე შემხვედრს (სხვა და სხვას) დაუსვა ერთი და იგივე კითხვა "თქვენს გარდა კიდევ რამდენი მოსახლე იღებავს თმას იგივე ფერით, რაც თქვენ?". ჩვენ ვიცით პასუხები: 4, 5, 1, 5, 2, 4, 3, 5, 2, 4, 4, 5, 1, 4, 14, 1, 5, 2, 1, 5, 14, 2, 5, 5, 1. დაადგინეთ კუნძულის მოსახლეთა შესაძლო მინიმალური რაოდენობა, თუ ცნობილია, რომ ყველამ უპასუხა სწორად. (პასუხი დაასაბუთეთ).

ამოხსნა

დავუშვათ, რომ ერთნაირი პასუხის მქონე ადამიანები ერთ ჯგუფში არიან, რომლებიც ერთსა და იმავე ფერით იღებავნ თმას.

თუ ვინმე პასუხობს „ k “ რაოდენობას, ეს ნიშნავს, რომ საერთო ჯამში არის $(k + 1)$ ადამიანი, ვინც ამ ფერით იღებავს თმას (პასუხის გამცემის ჩათვლით).

დავთვალოთ თითოეული განსხვავებული პასუხის რაოდენობა:

- პასუხი 1 — 5-ჯერ: საჭიროა მინიმუმ სამი 2-კაციანი ჯგუფი ($2 \times 3 = 6$).

- პასუხი 2 — 4-ჯერ: საჭიროა მინიმუმ ორი 3-კაციანი ჯგუფი ($3 \times 2 = 6$).
- პასუხი 3 — 1-ჯერ: საჭიროა მინიმუმ ერთი 4-კაციანი ჯგუფი ($4 \times 1 = 4$).
- პასუხი 4 — 5-ჯერ: საჭიროა მინიმუმ ერთი 5-კაციანი ჯგუფი ($5 \times 1 = 5$).
- პასუხი 5 — 8-ჯერ: საჭიროა მინიმუმ ორი 6-კაციანი ჯგუფი ($6 \times 2 = 12$).
- პასუხი 14 — 2-ჯერ: საჭიროა მინიმუმ ერთი 15-კაციანი ჯგუფი ($15 \times 1 = 15$).

საბოლოოდ:

$$6 (3.1) + 6 (3.2) + 4 (3.3) + 5 (3.4) + 12 (3.5) + 15 (3.14) = 48$$

დასკვნა:

კუნძულზე მოსახლეობის მინიმალური რაოდენობა შეიძლება იყოს 48 ადამიანი.

10. მწკრივში დგას N ჯარისკაცი. რამდენნაირად არის შესაძლებელი ამ ჯარისკაცებიდან ერთის მაინც გამოყვანა მწკრივიდან ისე, რომ გამოყვანილებში არ შეგვხდეს ისინი, ვინც მწკრივში მეზობლად იდგა? დაადგინეთ პასუხი, თუ: ა) $N=6$, ბ) $N=21$. (პასუხი დაასაბუთეთ).

ამოხსნა

დავიყვანოთ ამოცანა ბინარული მიმდევრობების ამოცანაზე. თითოეული ჯარისკაცი შეიძლება დარჩეს (0) ან გამოვიდეს (1). ამასთან, ორი მეზობელი ჯარისკაცი ერთდროულად ვერ გამოვა (დაუშვებელია ორი მიმდევრული ერთიანი).

ეს ნიშნავს, რომ ჩვენი ამოცანა ეხება იმ ბინარული მიმდევრობების რაოდენობას სიგრძით N, სადაც არ გვხვდება ერთმანეთის მიყოლებით ორი ერთიანი.

მინიმალური შემთხვევების მიხედვით ვაგებთ შემდეგ მიმდევრობას:

$$- R(1) = 2 \rightarrow \{0, 1\}$$

$$- R(2) = 3 \rightarrow \{00, 01, 10\}$$

საერთო შემთხვევისთვის მოქმედებს რეკურსიული წესი:

$$R(n) = R(n-1) + R(n-2)$$

ეს წესი არის ფაქტობრივად ფიბონაჩის მიმდევრობა, ოღონდ სხვა საწყისი პირობებით.

გვსურს, ამ მიმდევრობებიდან ამოვაკლოთ ის, რომელიც სრულად 0-ია (ანუ არც ერთი ჯარისკაცი არ გამოსულა). შესაბამისად, საბოლოო პასუხი იქნება $R(n) - 1$.

გამოთვლები:

$$R(3) = 5$$

$$R(4) = 8$$

$$R(5) = 13$$

$$R(6) = 21 \rightarrow R(6) - 1 = 20$$

$$R(7) = 34$$

$$R(8) = 55$$

$$R(9) = 89$$

$$R(10) = 144$$

$$R(11) = 233$$

$$R(12) = 377$$

$$R(13) = 610$$

$$R(14) = 987$$

$$R(15) = 1597$$

$$R(16) = 2584$$

$$R(17) = 4181$$

$$R(18) = 6765$$

$$R(19) = 10946$$

$$R(20) = 17711$$

$$R(21) = 28657 \rightarrow R(21) - 1 = 28656$$

დასკვნა:

ა) როცა $N = 6$, არსებობს 20 შესაძლო ვარიანტი;

ბ) როცა $N = 21$, არსებობს 28656 შესაძლო ვარიანტი.