მოსწავლეთა VI საშობაო ოლიმპიადა ინფორმატიკაში, ალგორითმული ტური.

ევროპის უნივერსიტეტი. თბილისი, 2021 წლის 21 მარტი.

1. მდინარის ერთ ნაპირს მიადგა **3 მისიონერი** და **ამდენივე კანიბალი**. ნაპირზე აღმოაჩინეს ნავი, რომლითაც შეიძლება იმგზავროს **არა უმეტეს 2-მა** ადამიანმა. როგორ გადავიდეს ექვსივე მეორე ნაპირზე იმ პირობის დაცვით, რომ არც ერთ მომენტში არც ერთ ნაპირზე **კანიბალების რაოდენობამ არ უნდა გადააჭარბოს მისიონერების რაოდენობას**. ნავს შეუძლია მოძრაობა მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ მას მართავს ამ ნავში მყოფი პიროვნება. ნავის მართვა შეუძლია ამ ექვსიდან თითოეულს.

ამოხსნა

საწყისი მდგომარეობა: MMMKKK__/______________-------

სვლა 1: KK (ვინ ჩავსვით ნავში). **მდგომარეობა 1 სვლის მერე**: MMMK________________/KK

სვლა 2: K . მდგომარეობა 2 სვლის მერე: MMMKK__/______________K

სვლა 3: KK . მდგომარეობა 3 სვლის მერე: MMM________________/KKK

სვლა 4: K . მდგომარეობა 4 სვლის მერე: MMMK__/______________KK

სვლა 5: MM . მდგომარეობა 5 სვლის მერე: MK________________/KKMM

სვლა 6: MK . მდგომარეობა 6 სვლის მერე: MMKK__/______________KM

სვლა 7: MM . მდგომარეობა 7 სვლის მერე: KK________________/KMMM

სვლა 8: K . მდგომარეობა 8 სვლის მერე: KKK__/______________MMM

სვლა 9: KK . მდგომარეობა 9 სვლის მერე: K________________/KKMMM

სვლა 10: K . მდგომარეობა 10 სვლის მერე: KK__/______________KMMM

სვლა 11: KK .მდგომარეობა 11 სვლის მერე: -------________________/KKKMMM

შეიძლება პირველი სვლა იყოს, «**MK**», მაშინ მეორე სვლა უნდა იყოს «**M**» და დანარჩენი კი როგორც ზემოთ.

2. ყვებიან, რომ დიდი ხნის ერთმანეთის უნახავი 2 ბრძენის შეხვედრისას ერთ-ერთმა მოიკითხა, თუ რამდენი შვილიშვილი ყავს მეორეს. მეორემ მიუგო – სამიო. მაშინ პირველმა კითხა – რა ასაკის არიანო. მეორემ უპასუხა – მათი ასაკები (წლები) გამოისახება ისეთი მთელი რიცხვებით, რომ მათი ნამრავლია **36**, ხოლო ჯამი კი **N (პირველმა ბრძენმა იცის ამ რიცხვის მნიშვნელობა – ჩვენ კი არ ვიცით).** მიუხედავად იმისა, რომ მეორემ პირველს დაუსახელა ასაკების ჯამი, პირველი არ მოეშვა (ეს არ აღმოჩნდა საკმარისი), მაშინ მეორემ ბოდიშის მოხდით დაამატა, რომ უფროსი შვილიშვილი, თურმე ძალიან გავს მას. ამის შემდეგ პირველმა გამოიცნო ბავშვების ასაკები. იგივე მოგეთხოვებათ თქვენც ყოველივე ზემოთქმულის საფუძველზე, იმის გათვალისწინებით, რომ ორივე მოსაუბრე ბრძენია. პასუხი დაასაბუთეთ.

ამოხსნა

აქ ამოსაწერია დადებითი მთელი რიცხვების ყველა სამეულები, რომლებიც ნამრავლში იძლევა 36-ს (ასეთი სამეულების რაოდენობა, თუ ისინი დალაგებულია კლებით, უდრის 8-ს). ყველა ასეთი სამეულისთვის გამოსათვლელია წევრების ჯამებიც. და რადგან პირველი ბრძენისთვის ნამრავლისა და ჯამის ცოდნა არ აღმოჩნდა საკმარისი, დასატოვებელია მხოლოდ ისეთი სამეულები, რომელთაც ერთნაირი ჯამი აქვს. შედეგად დაგვრჩება სულ 2 სამეული (9,2,2) და (6,6,1). აქედან, მეორე ბრძენის დასკვნითი ფრაზიდან ადვილად დავადგენთ, რომ მეორე ვარიანტი არ გამოდგება. საბოლოოდ, პასუხად გვრჩება ასაკები **9,2** და **2**.

3. ვიტყვით, რომ **A** სტრიქონი თავსებადია **B** სტრიქონთან მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ მას იგივე სიგრძე აქვს და იგი არ შეიცავს არც ერთ ისეთ სიმბოლოს, რომელიც არ გვხდება **B**-ში. სტრიქონისთვის

abadela დაადგინეთ მისი რიგითი ნომერი მიმდევრობაში, რომელიც შედგება ლექსიკოგრაფიულად დალაგებული ყველა იმ და მხოლოდ იმ სტრიქონისგან, რომლებიც მასთან თავსებადია. მაგალითად, თუ იგივე ვიკითხეთ სტრიქონისთვის **abc ,** პასუხი იქნება **6**, ვინაიდან ზემონახსენები წესით აგებული მიმდევრობის პირველი **6** წევრი იქნება: **aaa aab aac aba abb abc** . თქვენი პასუხი დაასაბუთეთ.

ამოხსნა

თუ ყურადღებით დავუკვირდებით პირობას, განსაკუთრებით, პირობაში განხილულ კონკრეტულ მაგალითს, ადვილად დავასკვნით, რომ არსებობს მარტივი ურთიერთ ცალსახა დამოკიდებულება პირობის მიხედვით აგებულ მიმდევრობის წევრებსა და ზრდადობით ამოწერილ ყველა **5**-ბით რიცხვს შორის, რომელთა თანრიგობრიობა არ აღემატება **7**-ს. და ამ დამოკიდებულებას განაპირობებს შემდეგი შესაბამისობა სიტყვა **abadela**-ში შემავალ ასოებსა და **5**-ბით ციფრებს შორის: **a<=>0 b<=>1 d<=>2 e<=>3** l(**მცირე რეგისტრის L**)**<=>4** . ამის შემდეგ პასუხის მიღებითვის გასათვალისწინებელია მხოლოდ ის, რომ მიმდევრობაში შემავალი ყოველი სტრიქონისთვის შესაბამისი **5**-ბითი რიცხვი იძლევა ამ მიმდევრობაში სტრიქონის რიგით ნომერთან შედარებით 1-ით ნაკლებ რიცხვს (რიცხვები იწყება 0-თ, ხოლო სტრიქონები ინომრება 1-დან). შედეგად, ვღებულობთ პასუხს **$(0102340)_5+1=(0102341)_5$** .

ეს **უკვე პასუხია** — ამოცანა არ გვავალდებულებს პასუხი მაინცა და მაინც ათობითში მივიღოთ. თუმცა, მიღებულის გადაყვანა **10**-ბითში არანაირ პრობლემას არ წარმოადგენს:

$(0102341)_5$=((((1*5+0)*5+2)*5+3)*5+4)*5+1=(((25+2)*5+3)*5+4)*5+1=
=((135+3)*5+4)*5+1=(690+4)*5+1=3470+1=3471 .

4. ილიას კალკულატორს შეუძლია მხოლოდ **2 სახის** ოპერაციის შესრულება — მიმდინარე რიცხვის **გამრავლება 3-ზე** (ავღნიშნოთ **3**-ით) და მიმდინარე რიცხვის **გაზრდა 1-ით** (ავღნიშნოთ **1**-ით). დაადგინეთ მოქმედებათა (ოპერაციათა) **მინიმალური სიგრძის** მიმდევრობა, რომლის შესრულება უზრუნველყოფს ამ კალკულატორზე **1717**-ის მიღებას, თუ **თავიდან** მიმდინარე რიცხვი იყო **1**. მაგალითად, 26-ისთვის პასუხი იქნებოდა **1311311 .** პასუხი დაასაბუთეთ.

ამოხსნა

ამოხსნის ძირითადი იდეა ემყარება იმ გარემოებას, რომ სვლების საძიებელი მიმდევრობის აღდგენა ცალსახად შეიძლება ბოლოდან წინამორბედი რიცხვების მიღებით. მართლაც, რადგან **1717 3-ზე** არ იყოფა, მისი წინამორბედი მნიშვნელობა შეიძლება ყოფილიყო მხოლოდ **1716. მაშასადამე, ბოლო სვლა შეიძლება ყოფილიყო მხოლოდ „1“.** რადგან **1716** იყოფა **3-ზე,** მაშინ, რადგან ჩვენ უმოკლეს გზას ვეძებთ, მისი წინამორბედი მნიშვნელობა უნდა ყოფილიყო **572,** ხოლო საძიებელი სვლების მიმდევრობის „კუდი“ კი იქნება „**31**“. **572**-ის ზედიზედ 2 წინამორბედი მნიშვნელობებია, შესაბამისად **571** და **570**, ხოლო ამ მომენტისთვის მიღებული სვლების დასკვნითი ნაწილია „**1131**“. რადგან **570 3-ზე** იყოფა, მისი წინამორბედი მნიშვნელობა იქნება **190**, ხოლო სვლების მიმდევრობის „კუდი“ კი ამ მომენტისთვის ტოლია „**31131**“-ის. **190**-ის უშუალო წინამორბედი არის **189**, ხოლო შესაბამისი „კუდია“ „**131131**“. **189-ის** სამი უშუალო წინამრბედია, შესაბამისად, **63, 21** და **7**. შესაბამისად, რიცხვ **7**-დან **1717** მიიღება სვლების მიმდევრობით: „**333131131**“. ამის შემდეგ ადვილად ვამთავრებთ პროცესს: **7**-ის წინამორბედი მნიშვნელობაა **6**, **6**-ის წინამორბედი მნიშვნელობაა **2**, ხოლო **2**-ის წინამორბედი მნიშვნელობა კი არის **1**, რასაც თავიდან უჩვენებდა ილიას კალკულატორი. მაშასადამე, **1**-დან **7**-ს ვღებულობთ სვლებით: „**131**“ და, საბოლოოდ, **1**-დან **1717** მიიღება სვლების შემდეგი უმოკლესი მიმდევრობით: „**131333131131**“.

5. როგორც ცნობილია, თუ ჩვენს განკარგულებაშია თეფშებიანი სასწორი გირების გარეშე, მაშინ **4** გარეგნულად ერთნაირი მონეტიდან ყალბი მონეტის დადგენა, თუ ეს მონეტა ერთადერთია და დანარჩენებისგან განსხვავდება მხოლოდ წონით (თუმცა, მძიმეა თუ მსუბუქი, უცნობია), **ყოველთვის შესაძლებელია 2** აწონვით. **5** მონეტიდან ერთადერთი ყალბი მონეტის დადგენას იგივე პირობებში, საზოგადოდ, **2 აწონვა უკვე არ ეყოფა**. დაადგინეთ, ყოველთვის შეიძლება თუ არა ამავე პირობებში **ერთადერთი** ყალბი მონეტის დადგენა **3** აწონვით, თუ მონეტების რაოდენობა არის: ა)**10**; ბ)**13**. პასუხი დაასაბუთეთ.

ამოხსნა

ორივე შემთხვევაში პასუხი დადებითია. ვაჩვენოთ, თუ როგორ შეიძლება ამოცანის პირობებში ყალბი მონეტის დადგენა 3 აწონვით 13 მონეტიდან.

პირველი აწონვით შევადაროთ ერთმანეთს მონეტების ორი ოთხეული. აქ შესაძლებელია სულ 2 ვარიანტი:

ა) მონეტები წონასწორობაშია, მაშინ ყალბი დარჩენილ ხუთეულშია. შევადაროთ 5-დან აღებული 3 (საეჭვო) მონეტა 3 ნამდვილად კარგს (ესენი შეგვიძლია თეფშებზე წონასწორობაში მყოფი 8 მონეტიდან ავიღოთ). თუ მონეტები წონასწორპბაშია, მაშინ ყალბი დარჩენილი 2 მონეტიდან ერთ-ერთა და ყალბის გამოვლენისთვის საკმარისია ამათგან ერთი შევადაროთ კარგ მონეტას...

თუ სამეულების შედარებისას წინასწორობა დაირღვა, მაშასადამე ყალბი მონეტა ერთ-ერთია საეჭვო სამეულიდან, მაგრამ ჩვენ უკვე დამატებით ისიც ვიცით – ყალბი კარგ მონეტასთან შედარებით მძიმეა თუ მსუბუქი. ამის გათვალისწინებით, ვადარებთ ერთმანეთს 2 საეჭვო მონეტას და ამ ერთი აწონვის მიხედვით ცალსახად ვადგენთ ერთადერთ ყალბ მონეტას.

ბ) მონეტები არ არის წონასწორობაში. მაშინ ჩვენი **13** მონეტა დაიყო **3** ჯგუფად – **5 კარგი** (რომლებიც არ იყო სასწორის თეფშებზე), ავრნიშნოთ ისინი ლათინური ასოთი „**R**“; **4 საეჭვო მსუბუქი** (რომლებიც თეფშებზე მსუბუქ მხარეს იყო), ავრნიშნოთ ისინი ლათინური ასოთი „**L**“; და, ბოლოს, **4 საეჭვო მძიმე** (რომლებიც თეფშებზე მძიმე მხარეს იყო), ავრნიშნოთ ისინი ლათინური ასოთი „**H**“. მეორე აწონვით შევადაროთ ერთმანეთს შემდეგი 4-ეულები:

LHHH და **HRRR** (ამ დროს, გადადებული მონეტებია **LLLRR**). აქ განსახილველია 3 სემთხვევა:

ბ1) თეფშები **წონასწორობაშია**. მაშინ ეჭვის ქვეშ რჩება მონეტები **LLL** და დარჩენილი 1 აწონვით ცალსახად გამოვავლენთ ყალბ მონეტას;

ბ2) **მარცხენა** თეფში **მსუბუქია**. ასეთ შემთხვევაში მარცხენა თეფშზე განთავსებულ სამივე **H**-ს ეჭვი მოეხსნა და ეჭვის ქვეშ დარჩა თითო **L** და **H**. ბოლო აწონვით აქედან ერთ-ერთს შევადარებთ კარგ მონეტას და ცალსახად გამოვავლენთ ყალბს;

ბ3) **მარცხენა** თეფში **მძიმეა**. ასეთ შემთხვევაში ბოლო აწონვის წინ ეჭვის ქვეშ რჩება მარცხენა თეფშზე მოთავსებული სამი ცალი **H** და დარჩენილი 1 აწონვით ცალსახად გამოვავლენთ ყალბ მონეტას.

6. თურმე ერთმა პიროვნებამ შეძლო **3 ვაშლის თანაბრად** განაწილება **2 მამას** და **2 შვილს** შორის. როგორ შეიძლება ეს მომხდარიყო, თუ ცნობილია, რომ ვაშლები არ გაჭრილა?

ამოხსნა

ეს შესაძლებელია იმის გამო, რომ სინამდვილეში ვაშლები განაწილდა **3 პიროვნებას შორის**, რადგან ერთ-ერთი შვილი, ამავდროულად, მამაც შეიძლება იყოს (პირველი მეორეს მამაა, მეორე კი მესამის მამა).

7. საწყობში მოიტანეს **4 ტონა** კიტრი. გარკვეული პერიოდის შემდეგ ამ კიტრს გამოუჩნდა მყიდველი და საჭირო გახდა კიტრის ხელახალი აწონვა. როგორია საწყობში განთავსებული კიტრის **ახალი ჯამური**

წონა, თუ ცნობილია, რომ საწყობში შეტანის მომენტიდან მყიდველის გამოჩენამდე კიტრს არავინ შეხებია და მისი წონის შეცვლა გამოიწვია მხოლოდ კიტრის შემადგენლობაში შემავალი წყლის ბუნებრივმა აორთქლებამ, სახელდობრ, თუ საწყობში ახალმიტანილ კიტრში წყალი შეადგენდა **98%-ს**, გაყიდვის მომენტისთვის წყლის შედგენილობა გაუტოლდა კიტრის სრული მასის **96%**-ს. პასუხი დაასაბუთეთ.

ამოხსნა

ძალიან მოულოდნელი პასხის მქონე ამოცანაა. მართლაც, თავდაპირველად კიტრის მყარი მასა შეადგენს მისი წონის 2%-ს, ხოლო გაყიდვის მომენტისთვის კი მყარი მასის ხვედრითი წილი კიტრის წონაში არის 4%, ანუ, გაორმაგებულია. რადგან მყარი მასის წონა არ შეცვლილა, ეს ნიშნავს, რომ კიტრის წონა **2-ჯერ შემცირებულა** და გაყიდვის მომენტისთვის შეადგენს **2 ტონას**.

8. ცნობილია, რომ ყოველი მთელი რიცხვი შეიძლება წარმოვადგინოთ პოზიციურ სისტემაში ფუძით **(-2)**, სადაც ციფრებად გამოიყენება მხოლოდ **0** და **1**, თანაც ეს წარმოდგენა ერთადერთია. მაგალითად, $\mathbf{9=(11001)_{(-2)}}$, ხოლო $\mathbf{-14=(110110)_{(-2)}}$, მართლაც, $\mathbf{1*(-2)^0+0*(-2)^1+0*(-2)^2+1*(-2)^3+1*(-2)^4=9}$, ხოლო $\mathbf{0*(-2)^0+1*(-2)^1+1*(-2)^2+0*(-2)^3+1*(-2)^4+1*(-2)^5=-14}$. წარმოადგინეთ პოზიციურ სისტემაში ფუძით **(-2)** რიცხვები: **43, -43, 2918** და **-2918.** პასუხი დაასაბუთეთ.

ამოხსნა

ვმოქმედებთ ზუსტად ისე, როგორც ჩვულებრივ **2-ბით** სისტემაში გადაყვანის დროს, ოღონდ გაყოფა ყოველთვის ხდება **(-2)**-ზე, მანამდე კი გასაყოფ რიცხვს **აკლდება (-2)-ზე გაყოფის ნაშთი** (რომელიც უდრის **1-ს**, თუ რიცხვი **კენტია** და უდრის **0-ს**, თუ რიცხვი **ლუწია**). მაგალითისთვის გადავიყვანოთ სისტემაში ფუძით (-2) დავალების მესამე და მეოთხე რიცხვები:

2918 | 0		-2918 | 0
-1459 | 1		1459 | 1
730 | 0	აქ მივიღეთ 730, რადგან -1459-1=-1460 და	-729 | 1
-365 | 1	-1460/(-2)=730	365 | 1
183 | 1		-182 | 0
-91 | 1		91 | 1
46 | 0		-45 | 1
-23 | 1		23 | 1
12 | 0		-11 | 1
-6 | 0		6 | 0
3 | 1		-3 | 1
-1 | 1		2 | 0
1 | 1		-1 | 1
0 |		1 | 1
		0 |

საბოლოოდ, $\mathbf{2918=(1110010111010)_{(-2)}}$,

$\mathbf{-2918=(11010111101110)_{(-2)}}$.

მოვიყვანოთ ამოცანის პირველი 2 რიცხვის (-2) ფუძიან პიზიციურ სისტემაში გადაყვანის შედეგი: $\mathbf{43=(1111111)_{(-2)}}$, $\mathbf{-43=(11010101)_{(-2)}}$.

შემოწმება ადვილად გვარწმუნებს მიღებულის სისწორეში.

9. დაადგინეთ უმცირესი დადებითი რიცხვი, რომლის ათობითი მნიშვნელობა **თავდება ციფრით 2** და რომელიც **ორმაგდება**, თუ ბოლო ციფრს **გადავანაცვლებთ რიცხვის თავში**. პასუხი დაასაბუთეთ.

ამოხსნა

პირობის მიხედვით, თუ საძიებელ რიცხვს ავღნიშნავთ **K2**-ით, სადაც **K** არის საძიებელი რიცხვის დასაწყისი, ადგილი უნდა ქონდეს ტოლობას: **K2*2=2K** .
მაგრამ, რადგან 2*2=4, ეს ნიშნავს, რომ **K**-ს ბოლო ციფრია **4.** ამ მსჯელობის გაგრძელებით, ადვილად დავასკვნით, რომ **K**-ში **4**-ის წინ განთავსებულია **8**… ამ პროცესის გაგრძელებით ან მივიღებთ საძიებელ რიცხვს (ანუ ნამრავლში მორიგ ციფრად მივიღებთ 2-ს ისე, რომ დამახსოვრებული არაფერი არ იქნება), ან დავინახავთ, რომ გამოთვლები მეორდება, რაც იმის საფუძველი იქნება, რომ დავასკვნათ ამოცანის ამოხსნის არარსებობა.
ამის შემდეგ გვრჩება ჩავატაროთ ეს პროცესი:

```
105263157894736842
                 2
-------------------------------
210526315789473684
```

ამრიგად, პასუხია **105263157894736842 .**

10. მიმდევრობა შედგება ლექსიკოგრაფიულად დალაგებული ყველა ისეთი სტრიქონისგან, რომელთა სიგრძე არის **8** და რომლებშიც გამოყენებულია მხოლოდ ქართული ასოები '**წ**' და '**ჭ**':

    წწწწწწწწ

    წწწწწწწჭ

    წწწწწწჭწ

    ...

    ჭჭჭჭჭჭჭჭ

    დაადგინეთ ამ მიმდევრობის ისეთი წევრების რაოდენობა, რომლებშიც ასო **ჭ** ჭარბობს ასო **წ** -ს. პასუხი დაასაბუთეთ.

ამოხსნა

ცხადია, სიტყვები, სადაც ასო **ჭ** ჭარბობს ასოს **წ** ზუსტად იმდენია, რამდენიც სიტყვები, სადაც, პირიქით, ასო **წ** ჭარბობს ასოს **ჭ .** მაშინ, თუ ავღნიშნავთ საძიებელ რაოდენობას **X**-ით, ხოლო ისეთი სიტყვების რაოდენობას, სადაც ეს ასოები თანაბრად არის, **Y**-ით, გვექნება ცხადი ტოლობა:

2*X+Y=256

აქ **256=2^{8}** მოცემული მიმდევრობის წევრთა საერთო რაოდენობაა.
ვიპოვოთ **Y.** ცხადია, ეს რაოდენობა უდრის **8** ადგილიდან ზუსტად **4** ადგილის (ვთქვათ, ადგილებს ვირჩევთ ასოებისთვის **ჭ**, დარჩენილ ადგილებზე განვათავსებთ **წ**-ებს) შერჩევათა ვარიანტების რაოდენობას, რაც პირდაპირ გამოითვლება სათანადო ბინომიალური კოეფიციენტით: **Y=C(8,4)=8*7*6*5/4!=7*2*5=70** .
მაშინ ზემომოყვანილი ფორმულიდან მივიღებთ:
2*X+70=256 <=> 2*X=186 <=> X=93 . ამით ამოცანა ამოხსნილია.
შევნიშნოთ, რომ კენტი სიგრძის სიტყვებისგან შედგენილი მიმდევრობისთვის მსგავსი ამოცანა კიდევ უფრო მარტივად ამოიხსნება, რადგან ასეთ შემთხვევაში, ცხადია, გვექნება **Y=0** და პასუხად მივიღებთ მიმდევრობის წევრთა საერთო რაოდენობის ნახევარს.